PROBABILITÉS DE RUINE POUR UNE CLASSE DE MODÈLES DE RISQUE SEMI-MARKOVIENS

By Jacques Janssen

Université Libre de Bruxelles

AND

Jean-Marie Reinhard

Groupe AG

Abstract

We consider particular semi-Markov risk models M/SM and $\bar{M}/SM$ for which the interarrival distributions are exponential with parameters depending of the risk type. We obtain theoretical expressions for the ruin probabilities on an infinite horizon.

In the special case of exponential distributions for the claim amounts, ruin probabilities are in both models solutions of linear differential systems. These systems are explicitly solved when there are only two risk types.

1. MODÈLES CONSIDÉRÉS

En suivant la terminologie de Janssen (1982), nous considérons essentiellement les modèles M/SM et $\bar{M}/SM$ eux-mêmes cas particulier du modèle SM/SM défini comme suit: $I=\{1,\ldots,m\}$ représentant l'ensemble des m types de sinistres possibles, l'idée de base est de supposer que si $(J_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ représentent respectivement la suite des types successifs, la suite des montants successifs des sinistres et celle des interarrivées, nous supposons que

$$\mathbb{P}[J_n=j,\, X_n\leq x,\, Y_n\leq y \mid (J_k, X_k, Y_k),\, k\leq n-1]=Q_{J_{n-1}j}(x,y) \tag{1.1}$$

en admettant que $J_0=j_0$, $X_0=Y_0=0$, $j_0\in I$.

La matrice $Q(\cdot,\cdot)=(Q_{ij}(\cdot,\cdot))$ est une matrice de fonctions de masse nulles en dehors de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ et telle que la matrice $P=Q(+\infty,+\infty)$ est une matrice de probabilité de transition, en fait celle de la chaîne de Markov (J_n).

Le modèle M/SM correspond au cas où:

$$Q_{ij}(x,y)=p_{ij}\,{}^{A}F_i(x)\,{}^{B}F_j(y) \tag{1.2}$$

avec

$$ {}^{A}F_i(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda_i x}, & x\geq 0.\end{cases} \tag{1.3}$$

Dans ces conditions, le processus des arrivées de sinistres est un processus de Markov homogène continu dans le temps ayant I comme espace d'états. Le modèle M'/SM est une variante du précédent pour lequel

$$Q_{ij}(x, y) = p_{ij}\, {}^A F_j(x)\, {}^B F_j(y) \tag{1.4}$$

où

$$ {}^A F_j(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda_j x}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Il semble plus adéquat en effet de faire dépendre la distribution de l'interarrivée entre 2 sinistres successifs plutôt du sinistre qui suit que de celui qui précède.

Désignons par

$$a_j = \int_0^\infty x\, {}^A dF_j(x), \tag{1.6}$$

$$b_j = \int_0^\infty y\, {}^B dF_j(y), \tag{1.7}$$

ces moyennes conditionnelles étant supposées finies. De plus, nous ferons toujours l'hypothèse que le taux de prime par unité de temps vaut 1 et ceci sans perte de généralité étant donné l'arbitraire laissé sur les moyennes a_j et b_j, $j \in I$.

Enfin, la matrice P sera toujours supposée ergodique ce qui implique l'existence d'une distribution stationnaire unique $\Pi = (\Pi_1, \ldots, \Pi_m)$.

Désignons, pour tout $i \in I$, par $R_i(u)$ la probabilité de non-ruine, partant en $t = 0$, juste après l'arrivée du sinistre du type i ayant, après règlement de ce sinistre, une réserve initiale de montant u $(u > 0)$.

Il est bien connu que

$$\lim_{u \to \infty} R_i(u) = 1 \tag{1.8}$$

ssi

$$\sum \Pi_i\, {}^B\eta_i < \sum \Pi_i\, {}^A\eta_i \tag{1.9}$$

où pour le modèle M/SM

$${}^B\eta_i = \sum_j p_{ij} b_j, \qquad {}^A\eta_i = a_i \tag{1.10}$$

et pour le modèle M'/SM

$${}^B\eta_i = \sum_j p_{ij} b_j, \qquad {}^A\eta_i = \sum_j p_{ij} a_j. \tag{1.11}$$

Nous travaillons désormais en supposant la condition (1.9) remplie. Pour les deux modèles, on voit aisément que (1.9) est équivalent à:

$$\sum_j \Pi_j b_j < \sum_j \Pi_j a_j. \tag{1.12}$$

2. TRAITEMENT DU MODÈLE M/SM (JANSSEN, 1982)

Pour simplifier les notations, nous posons

$$ {}^{B}F_j(\cdot) = B_j(\cdot). \tag{2.1} $$

Un raisonnement probabiliste élémentaire conduit au résultat suivant:

$$ R_i(u) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau \int_0^{u+\tau} R_j(u+\tau-x)\, dB_j(x), \qquad i \in I. \tag{2.2} $$

En effectuant le changement de variable $u+\tau=\xi$, il vient.

$$ R_i(u) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i p_{ij} \int_u^\infty e^{-\lambda_i(\xi-u)}\, d\xi \int_0^\xi R_j(\xi-x)\, dB_j(x) \tag{2.3} $$

ce qui prouve la différentiabilité des $R_i(u)$. La différentiation donne:

$$ R_i'(u) = \lambda_i R_i(u) - \lambda_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \int_0^u R_j(u-x)\, dB_j(x), \qquad i \in I. \tag{2.4} $$

De façon générale, en désignant par $\tilde{C}$ la transformée de Laplace de la fonction C:

$$ \tilde{C}(s) = \int_0^\infty e^{-st} C(t)\, dt, \tag{2.5} $$

le système précédent prend la forme:

$$ s\tilde{R}_i(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^{m} [p_{ij} b_j(s) - \delta_{ij}] \tilde{R}_j(s) = R_i(0) \tag{2.6} $$

où

$$ b_j(s) = \int_{0^-}^\infty e^{-sx}\, dB_j(x) $$

Posons maintenant:

$$ \Lambda = (\lambda_i \delta_{ij}), \tag{2.7} $$

$$ b(s) = (\delta_{ij} b_j(s)). \tag{2.8} $$

Si $\tilde{R}(s)$ représente le vecteur-colonne des $\tilde{R}_i(s)$, $i=1,\ldots,m$ et $R(u)$ celui des $R_i(u)$, le système (2.6) devient:

$$ s\left(I - \Lambda\left(\frac{I-Pb(s)}{s}\right)\right) \tilde{R}(s) = R(0). \tag{2.9} $$

On vérifie aisément que la matrice

$$ \tilde{A}(s) = \frac{\Lambda(I-Pb(s))}{s} \tag{2.10} $$

tend vers la matrice nulle lorsque s tend vers ∞; par conséquent.

$$(I-\tilde{A}(s))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{A}(s))^n. \tag{2.11}$$

Posons

$$A(t)=\mathscr{L}^{-1}(\tilde{A}(s)). \tag{2.12}$$

Il vient

$$A(t)=\Lambda(I-PB(t)) \tag{2.13}$$

où $B(\cdot)$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $B_j(\cdot)$. Nous avons ainsi la forme explicite de la transformée de Laplace inverse de $(I-\tilde{A}(s))^{-1}$ par

$$\mathscr{L}^{-1}(I-\tilde{A}(s))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^{(n)}(t) \tag{2.14}$$

$A^{(n)}(\cdot)$ représentant la $n^{\text{ième}}$ convoluée de la matrice $A(\cdot)$:

$$A^{(0)}(t)=I(t), \qquad A^{(1)}(t)=A(t), \tag{2.15}$$

$$A^{(n)}(t)=\left(\sum_{j=1}^{m}\int_0^t A_{ij}^{(n-1)}(t-v)A_{jk}(v)\,dv\right), \qquad n\geq 2. \tag{2.16}$$

En revenant au système (2.9), il vient:

$$R(u)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^u A^{(n)}(t)\,dt\right)R(0) \tag{2.17}$$

la valeur de $R(0)$ résultant du fait que, par (1.8):

$$\lim_{u\to\infty}R(u)=1 \tag{2.18}$$

Si $m=1$, on retrouve le résultat suivant:

$$R(u)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^u \bar{B}^{(n)}(t)\,dt\right)R(0) \tag{2.19}$$

où

$$\bar{B}(u)=1-B(u). \tag{2.20}$$

En faisant tendre $u\to\infty$, il vient:

$$R(0)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n b^n\right)^{-1} \tag{2.21}$$

$$=1-\lambda b \tag{2.22}$$

b étant la moyenne relative à la f.d. $B(\cdot)$.

3. TRAITEMENT DU MODÈLE M'/SM

Montrons d'abord que pour un tel modèle le processus

$$((J_{n+1}, X_n, Y_n), n \geq 0) \tag{3.0}$$

vérifie encore (1.1); en effet, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[J_{n+1} = l, X_n \leq x, Y_n \leq y \mid (J_{l+1}, X_l, Y_l), l \leq n-1, J_n = k] \\ = p_{kl}\, {}^{A}F_k(x)\, {}^{B}F_k(y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Désignons par $\bar{R}_i(u)$ les probabilités de non-ruine relatives au noyau (3.1). Il est clair que

$$R_i(u) = \sum_j p_{ij} \bar{R}_j(u). \tag{3.2}$$

Il suffit donc de calculer les probabilités $\bar{R}_j(\cdot)$ pour en déduire les probabilités $R_i(u)$ cherchées.

Un raisonnement analogue à celui fait à la Section 2 donne:

$$\bar{R}_i(u) = \sum_j p_{ij} \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau \int_0^{u+\tau} \bar{R}_j(u+\tau-x)\, dB_i(x) \tag{3.3}$$

En effectuant le changement de variables $u+\tau=\xi$, il vient

$$\bar{R}_i(u) = \sum_j \lambda_i p_{ij} \int_0^\infty e^{-\lambda_i(\xi-u)}\, d\xi \int_0^\xi \bar{R}_j(\xi-x)\, dB_i(x) \tag{3.4}$$

ce qui prouve la différentiabilité des $R_i(u)$. La différentiation donne:

$$\bar{R}_i'(u) = \lambda_i \bar{R}_i(u) - \lambda_i \sum_j p_{ij} \int_0^u \bar{R}_j(\xi-x)\, dB_i(x) \tag{3.5}$$

systéme analogue au système (2.4) et qui se traite de la même façon. En passant aux transformées de Laplace, on obtient:

$$s\bar{\tilde{R}}_i(s) + \lambda_i \sum_{j=1}^m [p_{ij} b_i(s) - \delta_{ij}] \bar{\tilde{R}}_j(s) = \bar{R}_i(0) \tag{3.6}$$

Posons maintenant

$$\Lambda = (\lambda_i \delta_{ij}), \tag{3.7}$$

$$b(s) = (\delta_{ij} b_j(s)). \tag{3.8}$$

Le système (3.6) devient

$$s\left(I - \frac{\Lambda(I-bP)}{s}\right) \bar{\tilde{R}} = \bar{R}(0), \tag{3.9}$$

expression analogue à (2.9).

Posons

$$\tilde{\underset{\sim}{A}}(s)=\frac{\Lambda(I-bP)}{s} \tag{3.10}$$

tendant à nouveau vers la matrice nulle lorsque s tend vers $+\infty$; par conséquent:

$$(I-\tilde{\underset{\sim}{A}}(s))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{\underset{\sim}{A}}(s))^{n}. \tag{3.11}$$

Posons

$$\underset{\sim}{A}(t)=\mathscr{L}^{-1}(\tilde{\underset{\sim}{A}}(s)). \tag{3.12}$$

Il vient

$$\underset{\sim}{A}(t)=\Lambda(I-B(t)P), \tag{3.13}$$

où $B(\cdot)$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $B_j(\cdot)$. Il vient ainsi:

$$\mathscr{L}^{-1}(I-\tilde{\underset{\sim}{A}}(s))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\underset{\sim}{A}^{(n)}(t) \tag{3.14}$$

les convoluées successives de $\underset{\sim}{A}(t)$ étant définies par des relations identiques à (2.15) et (2.16).

En revenant au système, il vient:

$$\bar{R}(u)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^u \underset{\sim}{A}^{(n)}(u)\,dt\right)\bar{R}(0) \tag{3.15}$$

$\bar{R}(0)$ étant définie par la relation (2.18).

Evidemment, le cas particulier $m=1$ redonne (2.19) puisque dans ce cas, les matrices $B(\cdot)$ et P commutent.

Cas particulier:

$$b_j(x)=\mu_j\,e^{-\mu_j x} \quad \text{où} \quad \mu_j=b_j^{-1}, \qquad j=1,\ldots,m. \tag{3.16}$$

Dans ce cas, les relations (3.5) deviennent:

$$\bar{R}_i'(u)=\lambda_i\bar{R}_i(u)-\lambda_i\sum_j p_{ij}\int_0^u \bar{R}_j(x)\mu_i\,e^{-\mu_i(u-x)}\,dx \tag{3.17}$$

d'où l'existence des dérivées secondes des fonctions $R_i(\cdot)$ qui se mettent sous la forme:

$$\bar{R}_i''(u)=\lambda_i\bar{R}_i'(u)-\lambda_i\sum_j p_{ij}\left[-\int_0^u \mu_i^2\bar{R}_j(x)\,e^{-\mu_i(u-x)}\,dx+\bar{R}_j(u)\mu_i\right] \tag{3.18}$$

$$=\lambda_i\bar{R}_i'(u)-\mu_i[\lambda_i\bar{R}_i(u)-\bar{R}_i'(u)]-\lambda_i\mu_i\sum_j P_{ij}\bar{R}_j(u). \tag{3.19}$$

On voit ainsi que les fonctions $\bar{R}_1(\cdot), \ldots, \bar{R}_m(\cdot)$ satisfont le système différentiel du second ordre à coefficients constants:

$$\bar{R}_i''(u) = (\lambda_i - \mu_i)\bar{R}_i'(u) + \lambda_i\mu_i\bar{R}_i(u) - \lambda_i\mu_i \sum_j p_{ij}\bar{R}_j(u). \tag{3.20}$$

Si $m = 1$, on retrouve l'équation

$$R''(u) = (\lambda - u)R'(u) \tag{3.21}$$

discutée dans Gerber (1979).

L'intérêt de (3.20) est de mettre la solution générale sous la forme d'une combinaison linéaire en général à coefficients constants de $2\,m$ exponentielles négatives ce qui est d'un grand intérêt, comme les développements ci-dessous le montrent, pour l'obtention de résultats numériques.

Remarque. (3.3) se met encore, grâce à (3.2) sous la forme:

$$\bar{R}_i(u) = \lambda_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau \int_0^{u+\tau} R_i(u+\tau-x)\, dB_i(x) \tag{3.22}$$

relations "inverses" de (3.2).

4. LE CAS EXPONENTIEL

Nous montrons que lorsque les distributions des montants de sinistres sont exponentielles:

$$B_j(x) = 1 - e^{-x/b_j}, \qquad (x \geqslant 0, j \in I) \tag{4.1}$$

le calcul des probabilités de non-ruine pour chacun des deux modèles traités ci-dessus se ramène à la résolution d'un système différentiel linéaire du deuxième ordre. Nous donnons explicitement la solution de ces systèmes dans le cas particulier $m = 2$. Nous supposerons constamment la condition (1.12) satisfaite.

4.1. *Le Modèle M/SM*

4.1.1. Sous la condition (4.1), on peut réécrire (2.4) comme suit:

$$R_i'(u) = \lambda_i R_i(u) = \lambda_i \sum_j p_{ij} \frac{1}{b_j} \int_0^u R_j(y)\, e^{-(u-y)/b_j}\, dy \tag{4.2}$$

d'où l'on déduit par une nouvelle dérivation

$$\begin{aligned} R_i''(u) = {} & \lambda_i R_i'(u) - \lambda_i \sum_j p_{ij} \frac{1}{b_j} R_j(u) \\ & + \lambda_i \sum_j p_{ij} \frac{1}{b_j^2} \int_0^u R_j(y)\, e^{-(u-y)/b_j}\, dy. \end{aligned} \tag{4.3}$$

On ne peut ramener directement ce systéme d'équations intégro-différentielles à un système différentiel. Cependant, on peut, pour se ramener à un système différentiel utiliser l'artifice suivant. Soit $L_j(u)$ la probabilité de non-ruine asymptotique juste avant l'arrivée d'un sinistre de type j si le montant des réserves libres avant ce sinistre est u. Ces probabilités sont liées aux $R_i(u)$ par les relations

$$R_i(u)=\sum_j p_{ij}\int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i t} L_j(u+t)\,dt, \qquad (u\geq 0,\ i\in I). \tag{4.4}$$

Un raisonnement probabiliste classique montre par ailleurs que les probabilités $L_j(u)$ vérifient les relations

$$\begin{aligned} L_j(u)=\int_0^u \frac{1}{b_j} e^{-x/b_j}\int_0^\infty \lambda_j e^{-\lambda_j t} \\ \times \sum_{k=1}^m p_{jk}L_k(u+t-x)\,dt\,dx, \qquad (j\in I,\ u\geq 0)\end{aligned} \tag{4.5}$$

ou encore en posant $u-x=z$:

$$\begin{aligned} L_j(u)=\int_0^u \frac{1}{b_j} e^{-(u-z)/b_j}\int_0^\infty \lambda_j e^{-\lambda_j t} \\ \times \sum_{k=1}^m p_{jk}L_k(z+t)\,dt\,dz, \qquad (j\in I,\ u\geq 0).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dérivons les deux membres de (4.6) par rapport à u et posons ensuite $u+t=v$. Il vient:

$$L_j'(u)=\frac{\lambda_j}{b_j}\int_u^\infty e^{-\lambda_j(v-u)}\sum_k p_{jk}L_k(v)\,dv-\frac{1}{b_j}L_j(u), \qquad (j\in I,\ u\geq 0). \tag{4.7}$$

Dérivons une nouvelle fois les deux membres de (4.7) par rapport à u; on obtient

$$\begin{aligned} L_j''(u)=-\frac{\lambda_j}{b_j}\sum_k p_{jk}L_k(u)+\lambda_j^2\frac{1}{b_j}\int_u^\infty e^{-\lambda_j(v-u)} \\ \times\sum_k p_{jk}L_k(v)\,dv-\frac{1}{b_j}L_j'(u), \qquad (j\in I,\ u\geq 0)\end{aligned} \tag{4.8}$$

ou encore en réutilisant (4.7):

$$L_j''(u)+\left(\frac{1}{b_j}-\lambda_j\right)L_j'(u)-\frac{\lambda_j}{b_j}\left[L_j(u)-\sum_k p_{jk}L_k(u)\right]=0. \tag{4.9}$$

Le système différentiel linéaire (4.9) doit être résolu avec les conditions aux bornes

$$L_j(0)=0, \qquad L_j(\infty)=1, \qquad (j\in I) \tag{4.10}$$

la deuxième de ces conditions résultant de (1.12) et (4.4).

4.1.2. Considérons le cas particulier où $m=2$ et où $p_{12}\cdot p_{21}>0$ (cette dernière condition résultant d'ailleurs du fait que la matrice P est supposée ergodique).

Le système (4.9) présente alors la même structure que le système rencontré dans REINHARD (1984):

$$(4.11)\qquad \begin{cases} L_1''(u)+\left(\dfrac{1}{b_1}-\lambda_1\right)L_1'(u)-\dfrac{\lambda_1 p_{12}}{b_1}L_1(u)+\dfrac{\lambda_1 p_{12}}{b_1}L_2(u)=0, \\ L_2''(u)+\left(\dfrac{1}{b_2}-\lambda_2\right)L_2'(u)-\dfrac{\lambda_2 p_{21}}{b_2}L_2(u)+\dfrac{\lambda_2 p_{21}}{b_1}L_1(u)=0. \end{cases}$$

Posons

$$(4.12)\qquad \rho_i=\left(\frac{1}{b_i}-\lambda_i\right),\qquad (i=1,2)$$

et supposons sans restriction $\rho_1 \geqslant \rho_2$; on a alors, vu (1.12), $\rho_1>0$.

La solution générale de (4.11) est donnée par

$$(4.13)\qquad \begin{cases} L_1(u)=A_0+A_1\,e^{k_1 u}+A_2\,e^{k_2 u}+A_3\,e^{k_3 u} \\ L_2(u)=A_0-D(k_1)A_1\,e^{k_1 u}-D(k_2)A_2\,e^{k_2 u}-D(k_3)A_3\,e^{k_3 u} \end{cases}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont les racines de l'équation du 3ème degré

$$(4.14)\qquad P(k)=k^3+(\rho_1+\rho_2)k^2+\left(\rho_1\rho_2-\frac{\lambda_2}{b_2}p_{21}-\frac{\lambda_1}{b_1}p_{12}\right)k$$
$$-\left(\frac{\lambda_2\rho_1}{b_2}p_{21}+\frac{\lambda_1\rho_2}{b_1}p_{12}\right)=0$$

et où

$$(4.15)\qquad D(k_i)=\frac{b_1(k_i^2+\rho_1 k_i)}{\lambda_1 p_{12}}-1,\qquad (i=1,2,3).$$

Comme

$$\Pi_1=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}},\qquad \Pi_2=\frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}},$$

(1.12) est équivalent à

$$(4.16)\qquad \frac{\lambda_2\rho_1}{b_2}p_{21}+\frac{\lambda_1\rho_2}{b_1}p_{12}>0.$$

Par conséquent $k_1k_2k_3>0$. Comme

$$(4.17)\qquad \begin{cases} P(0)<0,\qquad P(+\infty)=+\infty,\qquad P(-\infty)=-\infty, \\ p(-\rho_1)=\dfrac{\lambda_1}{b_1}p_{12}(\rho_1-\rho_2)\geqslant 0, \\ P(-\rho_2)=\dfrac{\lambda_2}{b_2}p_{21}(\rho_2-\rho_1)\leqslant 0, \end{cases}$$

P a une racine négative, soit k_2 satisfaisant

(4.18) $$-\rho_1 \leqslant k_2 \leqslant -\rho_2$$

et une racine positive, soit k_3. On voit finalement que si $\rho_1 > \rho_2$, la troisième racine k_1 est strictement inférieure à $-\rho_1$. Si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ on obtient la même conclusion en vérifiant que $P'(-\rho) < 0$. En résumé:

(4.19) $$\begin{cases} k_1 < -\rho_1 < k_2 < \min\{0, -\rho_2\};\ k_3 > 0 & \text{si } \rho_1 > \rho_2, \\ k_1 < -\rho = k_2 < 0 < k_3 & \text{si } \rho_1 = \rho_2 = \rho. \end{cases}$$

La condition $L_1(\infty) = L_2(\infty) = 1$ entraîne alors $A_3 = 0$, $A_0 = 1$. A_1 et A_2 sont alors déterminés par la condition $L_1(0) = L_2(0) = 0$:

(4.20) $$\begin{cases} A_1 + A_2 = -1, \\ -D(k_1)A_1 - D(k_2)A_2 = -1, \end{cases}$$

d'où

(4.21) $$A_1 = \frac{1 + D(k_2)}{D(k_1) - D(k_2)}, \qquad A_2 = \frac{1 + D(k_1)}{D(k_2) - D(k_1)}.$$

Finalement:

(4.22) $$\begin{cases} L_1(u) = 1 + \dfrac{1 + D(k_2)}{D(k_1) - D(k_2)}\, e^{k_1 u} + \dfrac{1 + D(k_1)}{D(k_2) - D(k_1)}\, e^{k_2 u} \\[2ex] L_2(u) = 1 - D(k_1)\dfrac{1 + D(k_2)}{D(k_1) - D(k_2)}\, e^{k_1 u} - D(k_2)\dfrac{1 + D(k_1)}{D(k_2) - D(k_1)}\, e^{k_2 u}. \end{cases}$$

Les probabilités de non ruine $R_i(u)$ peuvent alors être explicitées en utilisant (4.4) et (4.22). On obtient:

(4.23) $$\begin{cases} R_1(u) = 1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - k_1}(p_{11} - p_{12}D(k_1))A_1\, e^{k_1 u} \\[1ex] \qquad\qquad + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - k_2}(p_{11} - p_{12}D(k_2))A_2\, e^{k_2 u} \\[2ex] R_2(u) = 1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - k_1}(p_{21} - p_{22}D(k_1))A_1\, e^{k_1 u} \\[1ex] \qquad\qquad + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - k_2}(p_{21} - p_{22}D(k_2))A_2\, e^{k_2 u} \end{cases}$$

4.2. *Le Modèle M'/SM*

4.2.1. Sous la condition (4.1) le système (3.5) s'écrit

(4.24) $$\bar{R}_i'(u) = \lambda_i \bar{R}_i(u) - \frac{\lambda_i}{b_i} \sum_j p_{ij} \int_0^u \bar{R}_j(y)\, e^{-(u-y)/b_i}\, dy, \qquad (i \in I,\ u \geqslant 0).$$

Dérivons une nouvelle fois les deux membres de (4.24). Il vient

$$\bar{R}_i''(u)+\left(\frac{1}{b_i}-\lambda_i\right)\bar{R}_i'(u)-\frac{\lambda_i}{b_i}\left[\bar{R}_i(u)-\sum_k p_{ik}\bar{R}_k(u)\right], \qquad (i\in I,\ u\geq 0), \tag{4.25}$$

c'est-à-dire un système différentiel identique à (4.9). Il faut cette fois le résoudre avec les conditions aux bornes

$$\bar{R}_i(\infty)=1, \qquad \bar{R}_i'(0)=\lambda_i R_i(0), \qquad (i\in I). \tag{4.26}$$

4.2.2. Dans le cas particulier $m=2$, $p_{12}\cdot p_{21}>0$, on obtient en conservant les notations de la Section 4.1.2:

$$\begin{cases}\bar{R}_1(u)=1+\bar{A}_1\, e^{k_1 u}+\bar{A}_2\, e^{k_2 u}\\ \bar{R}_2(u)=1-D(k_1)\bar{A}_1\, e^{k_1 u}-D(k_2)\bar{A}_2\, e^{k_2 u},\end{cases} \tag{4.27}$$

où $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ sont solutions de

$$\begin{cases}(k_1-\lambda_1)\bar{A}_1+(k_2-\lambda_2)\bar{A}_2=\lambda_1,\\ -(k_1-\lambda_1)D(k_1)\bar{A}_1-(k_2-\lambda_2)D(k_2)\bar{A}_2=\lambda_2.\end{cases} \tag{4.28}$$

Les probabilités de non-ruine $R_i(u)$ du modèle initial sont alors déterminées par (4.27) et (3.2). On obtient après calculs:

$$\begin{cases}R_1(u)=1+\left[1-\dfrac{k_1(k_1+\rho_1)}{\lambda_1 b_1}\right]\bar{A}_1\, e^{k_1 u}+\left[1-\dfrac{k_2(k_2+\rho_1)}{\lambda_1 b_1}\right]\bar{A}_2\, e^{k_2 u},\\[2ex] R_2(u)=1+\left[1-\dfrac{p_{22}k_1(k_1+\rho_1)}{p_{12}\lambda_1 b_1}\right]\bar{A}_1\, e^{k_1 u}+\left[1-\dfrac{p_{22}k_2(k_2+\rho_1)}{p_{12}\lambda_1 b_1}\right]\bar{A}_2\, e^{k_2 u}.\end{cases} \tag{4.29}$$

RÉFÉRENCES

GERBER, H. U. (1979) *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* Richard D. Irwin, Inc.: Homewood.

JANSSEN, J. (1982) Modèles de risque semi-markoviens. *Cahiers du C.E.R.O.* **24**, 261-280.

REINHARD, J. M. (1984) On a Class of Semi-Markov Risk Models Obtained as Classical Risk Models in a Markovian Environment. *Astin Bulletin* **14**, 23-43.